Limity posloupností

4. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je **limitou** posloupnosti $\{a_n\}$, pokud platí, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je ∞, pokud $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon\ a_n > K$. A konečně řekneme, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je $-\infty$, pokud $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ a_n < K$.
Je-li $A \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pak to značíme symbolem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, případně $\lim a_n = A$. Má-li posloupnost konečnou (vlastní) limitu, řekneme, že je **konvergentní**. Není-li tomu tak, řekneme, že je **divergentní**.

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$, pak platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- Je-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo b_n nenulové, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, je-li výraz na pravé straně definován.

Příklady:

1. Spočtěte (z definice) následující limity posloupností (pokud existují):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-2)^{-n}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi)$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\pi)$

2. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 2n)$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

   f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}\right)$

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n}$

   h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan n + n}{n}$

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^{2n} - 3 \cdot 3^n)$

   j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}$

   k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{n}$

   l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

   m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$

   n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$

   o) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$